РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

МАТЕМАТИЧЕСКОГО КРУЖКА

В 5 КЛАССЕ

Пояснительная записка

Математика занимает особое место в образовании человека, что определяется безусловной практической значимостью математики, её возможностями в развитии и формировании мышления человека, её вкладом в создание представлений о научных методах познания действительности. Являясь частью общего образования, среди предметов, формирующих интеллект, математика находится на первом месте.

Первоначальные математические познания должны входить с самых ранних лет в наше образование и воспитание. Результаты надёжны лишь тогда, когда введение в область математических знаний совершается в лёгкой и приятной форме, на предметах обыденной и повседневной обстановки, подобранных с надлежащим остроумием и занимательностью.

Программа кружка рассчитана на учащихся 5 классов, склонных к занятиям математикой и желающих повысить свой математический уровень. Именно в этом возрасте формируются математические способности и устойчивый интерес к математике.

Данная программа является частью интеллектуально-познавательного направления дополнительного образования и расширяет содержание программ общего образования.

Цель программы– способствовать воспитанию интереса учащихся к математике и формированию когнитивных умений в процессе занятий математического кружка способностей.

Образовательные задачи:

- углубление и расширение знаний учащихся по математике;

- привитие интереса учащимся к математике;

- активизировать познавательную деятельность;

- показать универсальность математики и её место среди других наук.

Воспитательные задачи:

- воспитание культуры личности;

- воспитание отношения к математике как к части общечеловеческой культуры;

- воспитание понимания значимости математики для научно – технического прогресса;

- воспитание настойчивости, инициативы, чувства ответственности, самодисциплины.

Развивающие задачи:

- развитие ясности и точности мысли, критичность мышления, интуиции, логического мышления, элементов алгоритмической культуры, пространственных представлений, способности к преодолению трудностей;

- формирование математического кругозора, исследовательских умений учащихся.

Программа содержит материал, как занимательного характера, так и дополняющий, расширяющий программу общеобразовательной школы по математике. Большое внимание в программе уделяется истории математики и рассказам, связанным с математикой (запись цифр и чисел у других народов, математические фокусы, ребусы и др.), выполнению самостоятельных заданий творческого характера (составить рассказ, фокус, ребус, задачу с использованием изученных математических свойств), изучению различных арифметических методов решения задач (метод решения «с конца» и др.), выполнению проектных работ. Уделяется внимание рассмотрению геометрического материала, развитию пространственного воображения.

Программа кружка рассчитана на один год обучения (35 занятий в течения учебного года). Итогом реализации программы являются: успешные выступления кружковцев на олимпиадах всех уровней, математических конкурсах, международной математической игре-конкурсе «Кенгуру», а также создание брошюры «Математическая шкатулка» (банк нестандартных задач для учащихся 5 класса), где будут собраны задачи по темам всего курса, которые составлены учащимися или взяты из каких-либо источников (книги, журналы, интернет) и их решения, проектные работы учащихся.

Учебно-тематический план

№	Раздел	Тема	Кол-во занятий	сроки проведения	
				по плану	**фактически**
1	**Занимательная арифметика**	Тема1.Запись цифр и чисел у других народов	**1**		
		Тема 2.Числа - великаны и числа- малютки	**2**		
		Тема3. Приёмы быстрого счёта	**2**		
2	**Занимательные задачи**	Тема 1. Магические квадраты	**1**		
		Тема 2.Математические фокусы	**2**		
		Тема 3.Математические ребусы	**2**		
		Тема 4. Софизмы	**1**		
		Тема 5.Задачи с числами	**1**		
		Тема 6.Задачи шутки	**1**		
		Тема 7.Старинные задачи	**1**		
3	**Логические задачи**	Тема 1.Задачи, решаемые с конца	**1**		

		Тема 2.Круги Эйлера	**2**		
		Тема 3.Простейшие графы	**2**		
		Тема 4.Задачи на переливания	**2**		
		Тема 5.Задачи на взвешивания	**2**		
		Тема 6.Задачи на движение	**2**		
4	**Геометрические задачи**	Тема 1.Задачи на разрезание	**1**		
		Тема 2.Задачи со спичками	**1**		
		Тема 3. Геометрические головоломки	**1**		
5	**Проекты**	Тема 1.Проектные работы.	**3**		
6	**Решение задач по всему курсу**	Тема 1.Решение задач	**2**		
		Тема 2.Составление и выпуск брошюры «Математическая шкатулка»	**2**		
		ИТОГО:	**35**		

Краткое содержание разделов

I. Занимательная арифметика

Тема 1.Запись цифр и чисел у других народов

Как люди научились считать. Старинные системы записи чисел. Цифры у разных народов. Римская нумерация.

Тема 2.Числа - великаны и числа- малютки

Открытие нуля. Мы живём в мире больших чисел. Числа-великаны. Названия больших чисел. Числа – малютки. Решение задач с большими и малыми числами.

Тема3. Упражнения на быстрый счёт

Некоторые приёмы быстрого счёта. Умножение двухзначных чисел на 11,22,33, . . . , 99. Умножение на число, оканчивающееся на 5. Умножение и деление на 25,75,50,125. Умножение и деление на 111,1111 и т.д. Умножение двузначных чисел, у которых цифры десятков одинаковые, а сумма цифр единиц составляет 10. Умножение двузначных чисел, у которых сумма цифр равна 10, а цифры единиц одинаковые. Умножение чисел, близких к 100. Умножение на число, близкое к 1000. Умножение на 101,1001 и т.д.

II. Занимательные задачи

Тема 1 . Магические квадраты.

Отгадывание и составление магических квадратов.

Тема 2.Математические фокусы.

Математические фокусы с «угадыванием чисел». Примеры математических фокусов.

Тема 3.Математические ребусы.

Решение заданий на восстановление записей вычислений.

Тема 4. Софизмы.

Понятие софизма. Примеры софизмов.

Тема 5.Задачи с числами

Запись числа с помощью знаков действий, скобок и определённым количеством одинаковых цифр.

Тема 6.Задачи – шутки

Решение шуточных задач в форме загадок.

III. Логические задачи

Тема 1.Задачи, решаемые с конца.

Решение сюжетных, текстовых задач методом «с конца».

Тема 2.Круги Эйлера.

Решение задач с использованием кругов Эйлера.

Тема 3.Простейшие графы

Понятие графа. Решение простейших задач на графы.

Тема 4.Задачи на переливания.

Решение текстовых задач на переливание.

Тема 5. Взвешивания.

Решение задач на определение фальшивых монет или предметов разного веса с помощью нескольких взвешиваний на чашечных весах без гирь.

Тема 6. Задачи на движение.

Решение текстовых задач на движение: на сближение, на удаление, движение в одном направлении, в противоположных направлениях, движение по реке.

Тема 7.Старинные задачи

Решение занимательных старинных задач и задач-сказок.

IV. Геометрические задачи

Тема 1.Задачи на разрезания.

Геометрия вокруг нас. Геометрия на клетчатой бумаге. Игра «Пентамино».

Тема 2. Задачи со спичками.

Решение занимательных задач со спичками.

Тема 3.Геометрические головоломки.

«Танграм».

V. Проекты

Тема 1.Выбор тем и выполнение проектных работ. Примерные темы проектов:

- Системы счисления. Мифы, сказки, легенды.
- Софизмы и парадоксы.
- Математические фокусы.
- Математика и искусство.
- Математика и музыка.
- Лабиринты.
- Палиндромы.
- Четыре действия математики.
- Древние меры длины.
- Возникновение чисел.
- Счёты.
- Старинные русские меры.
- Магические квадраты.
- Свои темы проектов.

Предполагаемые результаты обучения

В результате занятий в кружке учащиеся должны

Знать:

- старинные системы записи чисел, записи цифр и чисел у других народов;
- названия больших чисел;
- свойства чисел натурального ряда, арифметические действия над натуральными числами и нулём и их свойства, понятие квадрата и куба числа;
- приёмы быстрого счёта;
- методы решения логических задач;
- свойства простейших геометрических фигур на плоскости;
- понятие графа;
- понятие софизма.

Уметь:

- читать и записывать римские числа;
- читать и записывать большие числа;
- пользоваться приёмами быстрого счёта;
- решать текстовые задачи на движение, на взвешивание, на переливание;
- использовать различные приёмы при решении логических задач;
- решать геометрические задачи на разрезание, задачи со спичками, геометрические головоломки, простейшие задачи на графы;
- решать математические ребусы, софизмы, показывать математические фокусы.
- выполнять проектные работы.

Литература

1. Гусев В.А., Орлов А.И., Розенталь А.Л. Внеклассная работа с учениками 5-6 классов. - М.: Просвещение,2005 .

2. Журналы «Математика в школе», 1980-2008.

3.А.С.Чесноков, С.И. Шварцбурд, В.Д.Головина, И.И. Крючкова, Л. А. Литвачук. Внеклассная работа по математике в 4-5 классах. М. , «Просвещение»,1974.

4. Фарков А.В. Математические кружки в школе. 5-8 классы– М. Айрис-пресс, 2006

5.Фарков А.В. Математические олимпиады в школе. 5-11 классы. М.: Айрис-пресс, 2002.

6.Фарков А.В. Внеклассная работа по математике.5-11 классы М.: Айрис-пресс, 2008

7. Ю.В.Щербакова. Занимательная математика на уроках и внеклассных мероприятиях. 5-8 классы. М.: Глобус.2008.

8.П.М. Камаев. Устный счёт. М.: Чистые пруды, 2007.(Библиотека « Первого сентября», серия « Математика», №3 (15)/2007)

9.Н.П. Кострикина. Задачи повышенной трудности в курсе математики 4-5 классов. Книга для учителя.- М.: Просвещение, 1986

Рабочая программа кружка «Занимательная математика»

(6 класс)

§1. Учебно-тематический план кружка

Внеклассная работа по математике является неотъемлемой частью учебно-воспитательного процесса в школе. Она способствует углублению знаний учащихся, развитию логического мышления, расширяет кругозор. Кружок также имеет сильное воспитательное значение, так как его целью является не только освещение какого-нибудь узкого вопроса, но и то, что учащихся надо заинтересовать, вовлечь их в самостоятельную деятельность.

Для занятий математического кружка "Занимательная математика" предлагаются несколько небольших фрагментов, которые, с одной стороны, тесно примыкают к основному курсу, а с другой - позволяют познакомить учащихся с новыми идеями и методами, расширить представления об изучаемом материале и, главное, порешать интересные задачи.

Основные требования к программе кружка:

- связь содержания программы кружка с изучением программного материала;
- использование занимательности;
- использование исторического материала;
- решение нестандартных, олимпиадных задач;
- учет желаний учащихся.

Для тех школьников, которые пока не проявляет заметной склонности к математике, эти занятия могут стать толчком в развитии их интереса к предмету и вызвать желание узнать больше. Кроме того, хотя эти вопросы и выходят за рамки обязательного содержания, они, безусловно, будут способствовать совершенствованию и развитию важнейших математических умений, предусмотренных программой.

Настоящая программа рассчитана на год обучения и предназначена для работы с обучающимися 6 класса. Занятия проводятся 1 раз в неделю по 1 уроку.

Основными целями кружка являются:

1. Формировать у учащихся качества мышления, характерные для математической деятельности и необходимые для продуктивной жизни в обществе.

2. Развивать у учащихся интерес к математике.

3. Развивать творческие способности учащихся.

4. Способствовать расширению математического кругозора школьников.

5. Добиваться выработки умений у учащихся решать нестандартные, логические, комбинаторные задачи.

6. Сформировать у учащихся приемы и навыки решения прикладных задач.

7. Изучение различных исторических фактов об известных математиках, их открытиях, воспитание трудолюбия, самостоятельности у учащихся.

Учебно-тематический план кружка (1 час в неделю)

№ занятия	Тема занятия	Кол-во часов	Примечания
1.	Введение	1	
2.	Все о числах	2	
3.	Великаны и карлики в мире чисел.	2	
4.	Признаки делимости	2	
5.	Магические квадраты	2	
6.	Мы умеем решать задачи.	2	
7.	Решение задач методом "с конца".	2	
8.	Задачи на разрезание и перекраивание.	2	
9.	Задачи на взвешивания и переливания	2	
10.	Элементы комбинаторики.	4	
11.	Графы.	2	
12.	Круги Эйлера.	2	
13.	Занимательная математика.	2	
14.	Математические шифры	2	
15.	Геометрия на спичках	2	
16.	Фокусы	2	
17	Заключительное занятие.	1	Всего 34 часа

§2. Вводное занятие

В начале первого занятия учитель приветствует учащихся, рассказывает о работе кружка. То есть кратко говорит о темах занятий (о признаках делимости, о принципе Дирихле, об инвариантах, шифрах, магических квадратах и т.д.), о том, что занятия будут проходить не только в формах лекций и семинаров, но и в различных других (беседы, викторины, исторические путешествия, лабораторная работа, урок-представление).

Первое занятие проводится в форме игры. Учитель делит участников кружка на команды (желательно, чтобы в каждой команде было человека 3-4). Школьникам предлагаются различные задания, часть из них по тем темам, которые запланированы учителем для изучения в процессе работы кружка: принцип Дирихле, задачи, решаемые с конца, логические задачи, задачи-шутки (которые используются в качестве разминки для учащихся), задачи на делимость. На первом этапе игры даются задачи-шутки, которые развивают быстроту мышления и логику у детей. На второй этапе каждой команде предлагаются одинаковые по тематике и сложности задания. На каждую задачу отводится определенное количество времени, после чего задания проверяются и выставляются баллы за их решение. На третьем этапе целесообразно предложить учащимся задачи более трудные. Даются несколько одинаковых заданий каждой из команды, кто быстрее справляется с ними, объясняет решение другим командам, если у тех, в свою очередь, возникли трудности.   В конце занятия подводятся итоги, считаются баллы, которые заработали каждая из команд участников. При решении заданий команды сообщают об этом учителю. Проверяются задания решением на доске. Если все команды допустили в решении ошибки или не знают, как его делать, то разбираются в решении вместе с учителем. Если только одна команда справилась с заданием, то представитель этой команды объясняет решение остальным участникам.

Великаны и карлики в мире чисел.

1). Сообщение ученика на тему "Легенда о шахматной доске".

2). Рассказ учителя о числах-великанах.

Предложить учащихся вспомнить, какие самые большие числа знают они? (миллион, миллиард, секстиллион …). На данном занятии мы и будем узнавать, какие же самые большие и маленькие числа знает человечество.

Теперь попробуем представить себе столь большие числа на практике. Толщина человеческого волоса - около 0,07 мм. Мы округлим ее для удобства вычислений до 0,1 мм. Представьте себе, что рядом, бок-о-бок, положен миллион волос. Какой ширины получилась бы полоса?

Оказывается, что ширина полосы из миллиона волос достигала бы примерно ста метров. Это кажется невероятным, но давайте проведем подсчет: 0,1мм·1 000000 - 0,1м·1000 = 0,1км = 100м (Мы проделали здесь умножение следующим путем: вместо умножения числа, мы дважды заменили самую единицу меры другою, в тысячу раз большею. Этот прием очень удобен для устных подсчетов, и им следует пользоваться).

Задачи для самостоятельного решения:

1). Сколько времени потребуется человеку, чтобы сосчитать миллиард зерен, если он в минуту будет считать по 100 зерен.

2). От земли до Марса около 60 млн. км. Сколько времени придется лететь на ракете от земли до Марса, если скорость ракеты будет 10км/ч? Сколько времени потребовалось бы самолету, летящему со скоростью 1000км/ч, чтобы преодолеть это расстояние?

3). В нашей стране проживают около 250 млн. человек. Если все люди встанут в одну шеренгу, то какой длины будет эта шеренга? (Пусть каждый человек занимает место длиной в 50см).

4). Каких размеров достигает обыкновенный комар, увеличенный в миллион раз? Длина комара приблизительно равна 5мм.

5). Узнайте свой рост, увеличенный в миллион раз?

6). Сколько километров займет миллион людей, построенных в один ряд плечом к плечу?

3). Рассказ учителя о числах - карликах.

В конце занятия обобщим знания, полученные на данном занятии.

Сверхгигант и сверхлилипут.

Наши беседы о великанах и карликах из мира чисел были бы неполны, если не рассказать одной изумительной диковинке этого рода - диковинке, правда, не новой, но стоящей дюжины новинок. Чтобы подойти к ней, начнем со следующей, на вид весьма незамысловатой задачи.

Какое самое большое число можно написать тремя цифрами, не употребляя никаких знаков действий?

Решение:

Хочется ответить: 999,-но, вероятно, вы уже подозреваете, что ответ иной; иначе задача была бы чересчур проста. И, действительно, правильный ответ пишется так:

Выражение это означает: "девять в степени девять в девятой степени".

Если хватит терпения выполнить перемножение девяти девяток, вы получите число: 387 420 489. Другими словами: нужно составить произведение из стольких девяток, сколько единиц в результате умножения: 9 · 9 · 9 · 9 · 9 · 9 · 9 · 9 · 9. Достаточно только начать вычисление, чтобы ощутить огромность ожидаемого результата: **9387420489,** т.е. произведение 387 420 489 девяток. Придется сделать круглым счетом 400 миллионов умножений.

Познакомившись с этим замаскированным гигантом, попытайтесь найти его противоположность. (Соответствующий числовой лилипут получится, если разделим единицу на это число. Будем иметь: 1/9387420489).

Архимед вычислил некогда, сколько песчинок заключал бы в себе мир, если бы весь он, до неподвижных звезд, наполнен был тончайшим песком. У него получился результат, не превышающий единицы с 63 нолями. Наше число состоит не из 64, а из 370 миллионов цифр - следовательно, оно неизмеримо превышает огромное число Архимеда.

В качестве домашнего задания можно предложить посчитать, сколько песчинок понадобится, чтобы устлать весь пол в квартире каждого учащегося в один ряд. Для этого необходимо узнать у родителей метраж квартиры. Размер песчинки приблизительно равен 0,125миллиметра.

§3. Признаки делимости

Учащиеся 6 класса уже владеют понятиями: "простые и составные числа", "Делители натурального числа", НОК и НОД, умеют применять свойства и признаки делимости.

Рассмотри задачу: в доме, где всего один подъезд - 35 квартир. Может ли дом быть семиэтажным? (Сколько тогда квартир на одном этаже). А четырехэтажным? Сколько этажей еще может быть в доме? Таким образом, мы можем сказать, что количество этажей - это число, на которое 35 делится без остатка, то есть нацело. Если одно натуральное число нацело делится на другое натуральное число, то первое называют кратным второму, а второе - делителем первого. Например, 35: 7 = 5, из этого следует, что 35 кратно 7, а 7 - делитель числа 35.

Можем ответить на вопросы нашей задачи: если на каждом этаже по одной квартире (что маловероятно), то этажей 35. Следуя данному рассуждению, мы делим 35 на 5 и получаем 7. То есть дом может быть пятиэтажным, на каждом этаже по 7 квартир. А четырехэтажным дом не может быть, поскольку 35 не делится на 4 нацело.

Признаки делимости представлены в виде таблицы. (Предложить учащимся сделать себе памятки в виде таблицы, для дальнейшего ее использования).

Признаки делимости. Пример: на 2 На 2 делятся все четные натуральные числа. 172, 94,67 838, 1670. на 3 На 3 делятся все натуральные числа, сумма цифр которых кратна 3. 16 734 (1+6+7+3+4=21; 21: 3 = 7). на 4 На 4 делятся все натуральные числа, две последние цифры которых составляют нули или число, кратное 4. 124 (24: 4=6); 103 456 (56: 4 = 14). на 5 На 5 делятся все натуральные числа, оканчивающиеся на 5 или 0. 125; 10 720. на 6 На 6 делятся те натуральные числа, которые делятся на 2 и на 3 одновременно (все четные числа, которые делятся на 3). 126 (6 - четное, 1 + 2 + 6 = 9, 9: 3 = 3). на 9 На 9 делятся те натуральные числа, сумма цифр которых кратна 9. 179 (1 + 1 + 7 + 9 = 18,18: 9 = 2). на 10 На 10 делятся все натуральные числа, оканчивающиеся на 0. 30; 980; 1 200; 1 570. на 11 На 11 делятся только те натуральные числа, у которых сумма цифр, занимающих четные места, равна сумме цифр, занимающих нечетные места, или разность суммы цифр нечетных мест и суммы цифр четных мест кратна 11. 105787 (1 + 5 + 8 = 14 и 0 + 7 + 7 = 14); 9 163 627 (9 + 6 + б + 7 = 28 и 1+3+2=6); 28 - 6 = 22; 22: 11 = 2). на 25 На 25 делятся те натуральные числа, две последние цифры которых - нули или составляют число, кратное 25. 2300; 650 (50: 25 = 2); 1475 (75: 25 = 3).

Задачи для работы по теме занятия.

1). Перечислите все цифры, которые следует поставить вместо звездочки в записи 3*16, чтобы получившиеся число делились на 3?

Решение: вспомним признак делимости на 3. сложим цифры, которые уже известны в данном числе, 3+1+6=10. Нам необходимо к 10 прибавить такое натуральное число, которое в сумме с 10 нацело делило бы число 3. Заметим, что следующее число после 10, которое делится 3 нацело, число 12. Соответственно мы нашли одно из чисел (2), удовлетворяющих условию задачи. Следующие числа, которые делится на 3 без остатка, - числа 15 и 18. Тем самым мы получили три числа (2, 5,8), которые нам подходят.

2). К числу 15 припишите слева и справа по одной цифре так, чтобы полученное число делилось на 15.

Решение: Обозначим неизвестные нам цифры через a и b. Тогда четырехзначное число можно записать в виде $a10b$. Данный вид записи подразумевает под собой то, что, например, число вида $abc = a\cdot 100+b\cdot 10+c$ (как пример можно привести: $123=1\cdot 100+2\cdot 10+3$). Это значит, что данное число представлено в виде: $a10b = a\cdot 1000+1\cdot 100+5\cdot 10+b$.

В условии задачи мы имеем: полученное число должно делиться на 15. Что это значит? Что мы должны рассмотреть признак делимости числа 15. То есть b либо равно 5, либо 0.

По признаку делимости на 5: b=0 или b=5. Рассмотрим оба случая.

а). Пусть b=0.

Полученное число $a150$ должно делиться на 15. (Подобно первой задаче находим число a). О признаке делимости на 5 мы сказали ранее, а на 3 число делится - тогда и только тогда, когда сумма его цифр, равная a+1+5, делится на 3. Отсюда получаем, что а=3, 6, 9.

б). Рассмотрим второй случай. Пусть b=5.

Здесь получаем, что полученное число $a10b$ делится на 5, а на 3 - тогда и только тогда, когда сумма его цифр, равная a+1+5+5, делится на 3. Получаем, что a=1, 4, 7.

Ответ: четырехзначные числа равны: 3150, 6150, 9150, 1155, 4155, 7155.

3). Найдите наибольшее натуральное число, делящееся на 36, в записи которого участвуют все 10 цифр по одному разу.

Решение: Число делится на 36 тогда и только тогда, когда оно делится на 9 и на 4. Проверим, что сумма всех десяти цифр делится на 9 (1+2+3+4+5+6+7+8+9=45; 45: 9=5). Поэтому любое число, в записи которого участвуют все 10 цифр по одному разу, делится на 9. Самым большим таким числом является число 9876543210. Но оно не делится на 4 (ибо число делится на 4 тогда и только тогда, когда две его последние цифры образуют число, делящееся на 4). Нужно добиться делимости на 4, минимально уменьшив при этом число. Очевидно, число 9876543120 делится на 4. Больше него только числа 9876543210 и 9876543201, которые на 4 не делятся.

Ответ: 9876543120.

Целесообразно дать учащимся подобные задачи для самостоятельного решения.

4). Замените звёздочки в записи числа 72*3* цифрами так, чтобы число делилось без остатка на 45.

5). Найти натуральные числа, дающие при делении на 2, 4, 5, 6 остаток 1, и, кроме того, делящиеся на

6). Заполните столбики таблицы, предлагаемыми числами:

, 192, 304, 766, 845, 900, 975, 5555, 6000.

Делятся на 2Делятся на 5Делятся на 10Делятся на 2 и на 5 одновременноДелятся на 2, но не делятся на 5Делятся на 5, но не делятся на 2

7). Докажите, что число записанное шестью одинаковыми цифрами, делится на 3, 7, 11, 13, 37.

В заключении хотелось бы представить участникам кружка четыре изумительных десятизначных числа:

438 195 760 785 942 160 753 869 120 876 391 520

В каждом из них есть все цифры от 0 до 9, причем каждая цифра только по одному разу и каждое из этих чисел делится на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, и 18. (Можно в виде домашнего задания предложить учащимся проверить несколько чисел).

§4. Магические квадраты

Вступительное слово учителя.

"В дни моей юности я в свободное время развлекался тем, что составлял… магические квадраты" - Бенджамин Франклин.

Одно из самых загадочных произведений изобразительного искусства хранится в Кунстхалле города Карлсруэ. Речь идет о гравюре Альбрехта Дюрера "Меланхолия I" (1514).

Значимая деталь, изображенная на гравюре "Меланхолия I" - составленный впервые в европейском искусстве магический квадрат 4 Х 4. Сумма чисел в любой строке или столбце равна 34. Два средних числа в нижнем ряду указывают дату создания картины 1514 год.

Размерность квадрата 4*4. Он заполнен числами от 1 до 4*4 (16) интересным образом. Учащимся самим предстоит узнать все о магическом квадрате, посчитать, чему равна сумма чисел по любой вертикали, горизонтали и диагонали (34). Учитель, в свою очередь, должен спросить, заметил ли кто-нибудь из них, в каких еще конструкциях встречается данная сумма (сумма встречается в угловых квадратах 2×2, в центральном квадрате (10+11+6+7), в квадрате из угловых клеток (16+13+4+1), в квадратах, построенных "ходом коня" (2+8+9+15 и 3+5+12+14), в прямоугольниках, образованных парами средних клеток на противоположных сторонах (3+2+15+14 и 5+8+9+12).

Магические квадраты - это таблицы чисел, в которых суммы чисел в каждой строке, в каждом столбце и в каждой из двух диагоналей квадрата все равны между собой. Из всякого магического квадрата путем различных перестановок составляющих его чисел можно получить множество новых магических квадратов, обладающих теми же свойствами.

Известно, что магических квадратов 2х2 не существует (предложить попытаться составить квадрат 2х2 и доказать, почему же его все таки не существует). Магический квадрат 3х3 только один. Магических квадратов 4х4, как на картине Дюрера, составлено уже 800, а количество магических квадратов 5х5 близко к четверти миллиона!

Заметка в тетрадь: каждый элемент магического квадрата называется клеткой. Квадрат, сторона которого состоит из n клеток, содержит n^2 клеток и называется квадратом n-го порядка.

Рассмотрим удобный способ заполнения магического квадрата 3-го порядка и составим магический квадрат третьего порядка. После чего участникам кружка предлагается самостоятельно составить магические квадраты.

Слово учителя о магическом квадрате Пифагора.

§5. Решение задач методом с "конца". Решение задач на все действия с дробными числами

Вступительное слово учителя.

Простейшим примером задачи, решаемой с "конца" может служить игра в лабиринты, нарисованные на бумаге, которые нужно проходить с помощью карандаша. Многие из этих лабиринтов содержат несколько возможных путей, и среди них только один верный путь, который приведет в конец лабиринта к заветной цели. Ускорить решение такой задачки-лабиринта можно, если пойти в обратном направлении, начав движение с конечной точки и прорисовывая путь к началу лабиринта.

Стратегия решения с конца очень удобна. На данном занятии мы в этом убедимся. При решении следующих задач необходимо выполнять проверку.

Задача 1: Я задумала число, умножила его на 7, прибавила 15 и получила 50. Какое число я задумала?

Решение: начнем решение задачи с "конца". В результате всех действий мы получили число 50. Далее от 50 отнимаем 15 и получаем число (35), до прибавления 15. Затем число, полученное в первом действии делим на семь, тем самым получаем искомое число 5.

Проверка: $5 \cdot 7=35$; $35+15=50$.

Таким образом, пользуясь обратным ходом, мы легко решили эту задачу.

Задача 2: Группа туристов отправилась в поход. В первый день они прошли 1/3 пути, во второй - 1/3 остатка, в третий - 1/3 нового остатка. В результате им осталось пройти 32км. Сколько километров был маршрут туристов?

Решение: Так как осталось 32км, а в третий день туристы прошли остаток, то 32км будут составлять последнего 2/3 остатка, тогда сам последний остаток будет равен 32: 2/3 = 48 (км). Эти 48км будут составлять 2/3 длины маршрута, оставшегося пройти после первого дня. Тогда весь маршрут, который осталось пройти, будет равен 48: 2/3 = 72 (км). Эти 72км составляют вновь 2/3, но уже всего маршрута туристов, а значит, весь маршрут будет равен 72: 2/3 = 108 (км). Задача решена.

Проверка: $108: 3 \cdot 1=36$ км - прошли в первый день; $108-36=72$, $72: 3 \cdot 1=24$ км - во второй день; $72-24=48$, $48: 3 \cdot 1=16$ км - в третий день; $48-16=32$ км - осталось пройти.

Решение олимпиадных задач:

1). Средний из трех братьев старше младшего на 2 года, а возраст старшего брата превышает сумму лет двух остальных братьев четырьмя годами. Найдите возраст каждого брата, если вместе им 96 лет.

Решение: Удвоенные возраст старшего брата на 4 года больше от суммы лет всех троих братьев и равен поэтому 96+4=100 годам. Значит, возраст старшего брата равен 100: 2=50 годам. Удвоенный возраст среднего брата на 2 года больше от суммы его лет и лет младшего брата и равен поэтому (96-50) +2=48. Значит возраст среднего брата равен 48: 2=24 годам. Теперь осталось найти возраст младшего брата: 96-50-24=22 года. Получаем ответ: младшему - 22, среднему - 24, старшему - 50

2). Однажды купец предложил бездельнику заработать. "Как только ты перейдешь через этот мост, - сказал он, - твои деньги удвоятся. Можешь переходить по нему сколько хочешь раз, но после каждого перехода отдавай мне за это 24 рубля". Бездельник согласился и … после третьего перехода остался без денег. Сколько денег у него было сначала?

Решение: Так как после третьего перехода у бездельника денег не осталось, то после перехода моста в третий раз у него было 24 рубля, а до перехода третьего моста - 12 рублей. Тогда после перехода второго моста у бездельника было 12 + 24 = 36 (рублей), а до перехода второго моста - 36: 2 = 18 (рублей). Рассуждая аналогично, получим, что после перехода первого моста у бездельника стало 18 + 24 = 42 (рубля), а перед переходом первого моста - 42: 2 = 21 (рубль). Таким образом, у бездельника сначала был 21 рубль.

Задачи для самостоятельного решения:

1). Я задумал число, умножил его на 8, результат уменьшил на 10 и новый результат умножил на 5. Получилось 70. Какое число я задумал. [дидактические материалы к учебнику Г.В. Дорофеева, И.Ф. Шарыгина "математика 6"]

2). Библиотека из фонда детских книг передала интернату половину книг и еще тридцать книг, после этого она передала половину оставшихся и еще десять книг. В библиотеке осталось 150 детских книг. Сколько детских книг было в библиотеке первоначально? [дидактические материалы к учебнику Г.В. Дорофеева, И.Ф. Шарыгина "математика 6"]

3). Маша принесла своим друзьям медведям торт. Известно, что старший медведь съедает торт за 2 дня, средний медведь - за 3 дня, младший медведь - за 6 дней. За сколько дней три медведя вместе съедят торт?

4). "Мишины котята". Увидит Миша где-нибудь брошенного котенка, непременно подберет и принесет домой. Всегда воспитывается у него несколько котят, а сколько именно он не любит говорить, чтобы над ним не смеялись. Бывало, спросят у него:

Сколько у тебя теперь котят?

Немного, - ответит он. - Три четверти их числа, да еще три четверти одного котенка.

Товарищи думали, что он просто балагурит. А между тем Миша задавал им задачу, которую решить совсем нетрудно. Сколько было у Миши котят? [Е.Г. Козлова. Сказки и подсказки. Задачи для математического кружка].

§6. Задачи на разрезание и перекраивание фигур

Данное занятие предполагается провести в виде "лабораторной" работы. Разбить участников кружка на группы по 2-3 человека. Каждой из групп предоставить заранее подготовленные учителем фигуры. Учащиеся располагают линейкой (с делениями), карандашом, ножницами. Разрешается производить с помощью ножниц лишь прямолинейные разрезы. Разрезав какую-нибудь фигуру на части, необходимо составить другую фигуру из тех же частей.

В начале занятия дать учащимся небольшую историческую справку: Задачами на разрезание увлекались многие ученые с древнейших времен. Решения многих простых задач на разрезание были найдены еще древними греками, китайцами, но первый систематический трактат на эту тему принадлежит перу Абуль-Вефа. Геометры всерьез занялись решением задач на разрезание фигур на наименьшее число частей и последующее построение другой фигуры в начале 20 века. Одним из основателей этого раздела был знаменитый основатель головоломок Генри Э. Дьюдени.

В наши дни любители головоломок увлекаются решением задач на разрезание прежде потому, что универсального метода решения таких задач не существует, и каждый, кто берется их решать, может в полной мере проявить свою смекалку, интуицию и способность к творческому мышлению. (На занятии мы будем указывать лишь один из возможных примеров разрезания. Можно допустить, что у учащихся может получиться какая-то другая верная комбинация - не надо этого бояться).

§7. Задачи на взвешивание и переливание

Данное занятие предлагается провести в виде практического занятия. Разбить класс на 2 группы. Каждой из групп предложить по задаче на взвешивание и переливание, после чего команда должна рассказать (показать) решение. Для следующих задач необходимо заранее подготовить сосуды емкостью 300мл, 400мл, 500мл, 900мл (из пластиковых бутылок), весы без циферблата, современные монеты, и монеты Советского союза достоинством 10р. и 900г крупы.

Группа 1. Задание 1: В бочке налита вода. Как отлить из нее 600мл с помощью сосудов вместимостью 900мл и 500мл? *Подсказка:* обращать внимание не только на то, сколько воды в каждом из сосудов, но и сколько осталось пустого места. Каждой группе дать для наглядности по таблице.

.Заполняем 500 миллилитровую бутыль полностью.

2.Выливаем ее полностью в 900 миллилитровую бутыль. В 900миллилитровой остается место еще для 400мл.

.Снова набираем 500 миллилитровую бутыль полностью и выливаем ее в 900 миллилитровую. Итого в 500миллилитровой останется 100мл.

.Выливаем из 900 миллилитровой все содержимое. И теперь в пустую 900миллилитровую бутыль выливаем 100мл из 500миллилитровой.

.Снова наполняем 500миллилитровую полностью и переливаем воду из нее в 900 миллилитровую. Тем самым мы получаем, что в 900миллилитровой у нас 600мл.

Задание 2: Имеется 80 монет, одна из которых фальшивая, причем она легче других. За какое наименьшее число взвешиваний на весах без гирь можно найти фальшивую монету?

Наводящие вопросы:

1.Как выделить наличие фальшивой монеты? Какое количество действий при этом получается?

2.Сколько действий будет, если кучки с монетами постоянно делить пополам?

.Как оптимизировать количество действий?

.Что будет, если монеты поделить на 3 и большее количество частей?

Решение: Выберем самое оптимальное решение, где количество действий наименьшее. Фальшивую монету можно определить за 4 взвешивания. Алгоритм следующий. Первое взвешивание: кладем на чаши по 27 монет. В случае равновесия фальшивая среди оставшихся 26. Если одна чаша легче, то фальшивая среди лежащих на ней 27. Второе взвешивание: кладем на обе чаши по 9 монет из числа "подозреваемых" и рассуждаем аналогично. В третьем взвешивании положим на чаши по 3 монеты, а в четвертом - по одной. Как видим, здесь деление не пополам, а на три по возможности равные части.

Группа 2: Задание 1: есть две пустые емкости 300мл и 500мл. Как отмерить 400мл воды? (Воду можно наливать и выливать бесконечное количество раз).

.Заполняем 500 миллилитровую бутыль полностью.

2.Выливаем из нее 3 литра в 300миллилитровую бутыль. В 500миллилитровой остается 200мл.

.Выливаем из 300миллилитровой бутыли всю воду и переливаем в неё оставшиеся 200мл из 500миллилитровой. В 300миллилитровой осталось свободное место для ста миллилитров.

Наполняем 500миллилитровую бутыль. Переливаем из неё 100мл в 300миллилитровую бутыль. В 500миллилитровой остается 400мл.

Задание 2: Имеется 900г крупы и чашечные весы с гирями в 5г и 20г. Попробуйте в три приема отвесить 200г этой крупы.

Наводящие вопросы:

1.Каким образом и сколько крупы мы можем отвесить сразу, не пользуясь гирями?

2.Сколько раз мы можем повторить шаг 1? Какое наименьшее количество крупы нам необходимо получить?

.Сколько грамм составляют гири вместе?

Решение: Нужно развесить крупу на две равные части по 450г; затем развесить одну из этих частей еще раз пополам, то есть по 225г, и от одной из этих частей отнять при помощи двух имеющихся гирь 25г. Таким образом, Вы получите вес в 200г.

Решение типовых задач:

1). Имеются шестилитровая банка сока и две пустые банки: трех - и четырехлитровая. Как налить 1литр сока в трехлитровую банку? (Предложить учащимся сначала заполнить таблицу, а затем составить алгоритм выполнения действий.

Решение: для решения данной задачи составим таблицу

Банки6 литров 4 литра 3 литра До переливания 600После 1-го переливания 240После 2-го переливания 213После 3-го переливания 510После 4-го переливания 501

·Заполняем соком из 6-литровой банки 4-литровую банку полностью. В 6-литровой остается 2 литра сока.

·Действуем аналогично: из 4-литровой выливаем 3литра в 3-литровую. Тем самым в 4-литровой остается 1литр.

·Содержимое 3-литровой выливаем в 6-литровую банку.

·Из 4-литровой банки переливаем литр содержимого в банку 3-литровую. В 6-литровой - 5литров; в 3-литровой - 1литр; 4-литровая банка - пустая.

2). В мешке 24кг. гвоздей. Как, имея только чашечные весы без гирь, отмерить 9кг гвоздей?

Задачи для самостоятельного решения:

1). Как, имея пятилитровое ведро и девятилитровую банку, набрать из реки ровно три литра воды?

2). Есть три бидона емкостью 14, 9 и 5литров. В большом бидоне 14л молока, остальные пусты. Как с помощью этих бидонов разделить молоко пополам?

3). Из 27 монет одна фальшивая. Фальшивая монета легче остальных. За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь можно определить фальшивую монету?

4). Как развесить 20фунтов чая в 10 коробок по 2фунта в каждой за девять развесов имея только гири на 5 и на 9фунтов?

5). Двое должны разделить поровну 8 ведер кваса, находящегося в восьмиведерном бочонке. Но у них есть только два пустых бочонка, в один из которых входит 5 ведер, а в другой - 3 ведра. Спрашивается, как они могут разделить этот квас, пользуясь только этими тремя бочонками?

§8. Элементы комбинаторики. Принцип Дирихле

В начале занятия кратко рассказать историю зарождения комбинаторики и об областях ее применения.

Определение. *Задачи на составление числа возможных соединений элементов с определенными свойствами, которые можно составить из элементов заданного множества, называются **комбинаторными.***

Задача 1. Сколько двузначных чисел можно составить, используя цифры 1, 4 и 7?

Решение: Для того чтобы не пропустить и не повторить ни одно из чисел, будем выписывать их в порядке возрастания. Сначала запишем числа, начинающиеся с цифры 1, затем с цифры 4 и, наконец, с цифры 7. Получаем следующий расклад.

111417414447717477

Таким образом, из трех данных цифр можно составить всего 9 различных двузначных чисел.

Данный метод называется ***методом перебора***.

Однако существует другой подход к решению самых разных комбинаторных задач с помощью составления специальных схем. Внешне такая схема напоминает дерево, отсюда название - ***дерево возможных вариантов.***

Вернемся к задаче о составлении двузначных чисел из цифр 1, 4 и 7. Для ее решения можно построить специальную схему.

Эта схема действительно похожа на дерево, правда, "вверх ногами" и без ствола. Знак * изображает корень дерева, ветви дерева - различные варианты решения. Чтобы получить двузначное число, надо сначала выбрать первую его цифру, а для нее есть три варианта: 1, 4 или 7. Поэтому из точки * проведены три отрезка и на концах поставлены цифры 1, 4 и 7.

Теперь надо выбрать вторую цифру, а для этого также есть три варианта: 1, 4 или 7. Поэтому от каждой первой цифры проведено по три отрезка, на концах которых снова записано 1, 4 или 7. Итак, получено всего 9 различных двузначных чисел. Других двузначных чисел из этих трех цифр составить невозможно.

Дополнительная подзадача: *Сколько двузначных чисел можно составить, используя цифры 1, 4 и 7, если цифры десятков и единиц не повторяются?*

Задача 2. Туристическая фирма планирует посещение туристами в Италии трех городов: Венеции, Рима и Флоренции. Сколько существует вариантов такого маршрута?

Способ 1: Обозначим города их первыми буквами. Тогда код каждого маршрута будет состоять из трех букв: В, Р и Ф, каждая из которых должна быть использована только один раз, например, ВФР или ФРВ.

Варианты путешествия получаются следующие: **ВРФ, ВФР, РВФ, РФВ, ФВР, ФРВ**, что хорошо видно из дерева вариантов.

Путешествие можно начинать в любом из трех городов. Если первой посетить Венецию, то затем можно поехать в Рим или во Флоренцию. Если вторым посетить Рим, то третьей будет Флоренция, если второй будет Флоренция, то третьим будет Рим. Это первые два варианта путешествия. Таким образом, всего существует 6 вариантов путешествия.

Способ 2: Для каждого из трех городов существует **2** варианта маршрута по оставшимся городам. Если 3 умножить на 2, получится 6. Такой же ответ получится при помощи дерева вариантов.

Про второй способ рассуждений обычно говорят так: мы использовали *правило умножения*.

Комбинаторные задачи бывают самых разных видов. Но большинство из них решается с помощью двух основных правил - правила суммы и правила произведения. Продолжим знакомиться с правилом произведения (умножения), сформулируем утверждение: ***Если первую компоненту пары можно выбрать n способами, а вторую можно выбрать k способами, то число всевозможных комбинаций пар равно произведению чисел n и k.***

Задача 3: Саша, Петя, Денис, Оля, Настя часто ходят в кафе. Каждый раз, обедая там, они рассаживаются по-разному. Сколько дней друзья смогут это сделать без повторения?

Решение: Пронумеруем стулья, на которых должен сесть каждый, и будем считать, что они рассаживаются поочередно:

№1 - Саша - есть возможность выбрать из 5 вариантов (стульев) №2 - Петя - 4 варианта №3 - Денис - 3 варианта №4 - Оля - 2 варианта №5 - Настя - 1 вариант

Используя правило умножения, получаем: 5x4x3x2x1=120

Теперь решим задачу, применяя правило сложения.

Задача 4: В коробке 6 синих карандашей и 12 красных. Сколько всего карандашей в коробке?

Решение: Мы легко можем ответить на вопрос, сложив число синих и красных карандашей, 6+12=18.

Изменим вопрос к задаче: сколькими способами можно выбрать из коробки один карандаш? Получим комбинаторную задачу. Число способов выбора одного карандаша равно числу всех карандашей в коробке, т.е.18. Но 18 - это сумма 6 и 12, где 6 - число способов выбора синего карандаша, а 12 - число выбора красного карандаша. Т.о. ***правило суммы*** можно сформулировать следующим образом.

Если объект a можно выбрать n способами, а объект b можно выбрать k способами, то выбор a или b можно сделать n+k способами.

Принцип Дирихле. В несерьёзной форме принцип Дирихле гласит: "Нельзя посадить 7 кроликов в 3 клетки, чтобы в каждой было не больше 2 кроликов. "

Более общая формулировка: "Если *z* зайцев сидят в *k* клетках, то найдётся клетка, в которой не менее *z/k* зайцев." Не надо бояться дробного числf зайцев: если получается, что в ящике не меньше 7/3 зайцев, значит, их больше двух.

Доказательство принципа Дирихле очень простое, но заслуживает внимания, поскольку похожие рассуждения"от противного" часто встречаются. Допустим, что в каждой клетке число зайцев меньше, чем z/k. Тогда в k клетках зайцев меньше, чем $k \cdot z/k = z$. Противоречие!

Решение задачи с помощью принципа Дирихле сводится к выбору "кроликов" и "клеток". Иногда не совсем очевидно, кто в данной задаче является "кроликом", и что служит "клеткой".

1). В классе 30 человек. В диктанте Стас Иванов сделал 13 ошибок, а остальные - меньше. Докажите, что по крайней мере три ученика сделали ошибок поровну (может быть, по 9 ошибок).

Решение: Это доказывается с помощью принципа Дирихле. Подумайте, кто здесь зайцы, и где клетки. (Здесь "зайцы" - ученики, а "клетки" - число сделанных ошибок). В клетку 0 "посадим" всех, кто не сделал ни одной ошибки, в клетку 1 - тех, у кого одна ошибка, в клетку 2 - две,. и так до клетки 13, куда попал один Стас Иванов.

Теперь применим принцип Дирихле, докажем утверждение задачи от противного.

Предположим, никакие три ученика не сделали по одинаковому числу ошибок, то есть в каждую из клеток 0, 1,., 12 попало меньше трех школьников.

Тогда в каждой из них два человека или меньше, а всего в этих 13 клетках не больше 26 человек. Добавив Стаса Иванова, все равно не наберем 30 ребят. Противоречие.

Можно ли утверждать, что ровно трое сделали поровну ошибок? Нет, конечно. Возможно, что все ребята, кроме Стаса, написали диктант без единой ошибки, то есть, все сделали по 0 ошибок. Можно ли считать, что по крайней мере четверо попали в одну "клетку"? Нет, нельзя. Класс, в котором по 3 человека сделали 0, 1, 2 ошибки, по 2 человека - 3, 4,., 12 ошибок и один - 13, удовлетворяет условию задачи.

2). В одном доме живут 13 учеников одной и той же школы. В этой школе 12 классов. Докажите, что хотя бы два ученика, живущие в этом доме, учатся в одном и том же классе

Решение. В данной задаче классы - это клетки, а учащиеся - кролики. У нас имеется 13 "кроликов" и 12 "клеток". Учитывая принцип Дирихле, мы получаем, что хотя бы в одной клетке "кроликов" два. То есть, если в школе 12 классов, то максимум в них может учиться 12 учеников. А 13 ученик все равно будет учиться в одном из этих 12 классов.

Задачи для самостоятельного решения:

1). В магазине "Все для чая" есть 5 разных чашек и 3 разных блюдца. Сколькими способами можно купить чашку с блюдцем? **2).** Сколько существует 6-значных чисел, все цифры которых имеют одинаковую четность? **3).** У Васи на куртке 3 кармана. Каким числом способов он может положить в эти карманы две одинаковые монетки?

4). В корзине сидят котята - 2 черных, 2 рыжих и 1 полосатый. Сколькими способами можно выбрать трех котят так, чтобы они все были разной окраски?

5). В корзине лежат яблоки двух сортов. Наугад берут из этой корзины несколько яблок. Какое наименьшее число яблок нужно взять, чтобы среди них оказались хотя бы два яблока одного сорта?

6). Докажите, что любое число рублей можно уплатить, если покупатель и кассир имеют лишь трехрублевые и пятирублевые денежные знаки.

§9. Графы. Применение графов к решению задач

Графы - это рисунки, которые состоят из точек и линий, соединяющих эти точки.

Каждая пара точек в графе может быть **соединена линиями**. Линия указывает на **связь между двумя точками**. Точки называются **вершинами графа**, а линии - **рёбрами.**

С какими графами вы встречаетесь повседневной в жизни? (схемы авиалиний, которые часто вывешивается в аэропортах, схемы метро, а на географических картах - изображение железных дорог). С помощью графов изображаются схемы дорог, газопроводов, тепло и электросетей.

Особым видом графа является дерево. **Дерево (граф)** - это способ организации информации об отношениях между объектами, в нем нет циклов, то есть нельзя из некоторой вершины пройти по нескольким различным ребрам и вернуться в ту же вершину. Примером такого дерева может служить генеалогическое дерево Рюриковичей и Романовых.

Рассмотрим одну из простейших задач: Между девятью планетами солнечной системы установлено космическое сообщение. Рейсовые ракеты летают по следующим маршрутам: Земля - Меркурий; Плутон - Венера; Земля - Плутон; Плутон - Меркурий; Меркурий - Венера; Уран - Нептун; Нептун - Сатурн; Сатурн - Юпитер; Юпитер - Марс и Марс - Уран. Можно ли долететь на рейсовых ракетах с Земли до Марса?

Решение: Нарисуем схему условия: планеты изобразим точками, их у нас 9, а маршруты ракет - направляющими линиями.

Теперь сразу видно, что долететь с Земли до Марса нельзя.

Запишем еще одно определение: **Степенью вершины графа** называется количество выходящих из нее ребер. В связи с этим, вершина, имеющая четную степень, называется четной вершиной, соответственно, вершина, имеющая нечетную степень, называется нечетной вершиной.

1). В городе Маленьком 15 телефонов. Можно ли их соединить проводами так, чтобы каждый телефон был соединен ровно с пятью другими?

Решение: Допустим, что такое соединение телефонов возможно. Тогда представим себе граф, в котором вершины обозначают телефоны, а ребра - провода, их соединяющие. Подсчитаем, сколько всего получится проводов. К каждому телефону подключено ровно 5 проводов, т.е. степень каждой вершины нашего графа - 5. Чтобы найти число проводов, надо просуммировать степени всех вершин графа и полученный результат разделить на 2 (т.к. каждый провод имеет два конца, то при суммировании степеней каждый провод будет взят 2 раза). Но тогда количество проводов получится разным15·5/2=37,5. Но это число не целое. Значит наше предположение о том, что можно соединить каждый телефон ровно с пятью другими, оказалось неверным.

Ответ. Соединить телефоны таким образом невозможно.

2). В государстве 100 городов к из каждого города выходит 4 дороги. Сколько всего дорог в государстве.

Решение. Подсчитаем общее количество выходящих городов дорог - 100.4 = 400. Однако при таком подсчете каждая дорога посчитана 2 раза - она выходит из одного города и входит в другой. Значит всего дорог в два раза меньше, т.е. 200.

3). Обрисовать фигуру, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя два раза по одной линии. Обозначьте точки пересечения, в скобках укажите, сколько линий выходит из данной точки. Если число линий четное - то вершина четная, если число линий нечетное - то вершина нечетная. Пометить вершину, с которой надо начинать обход.

Сделаем вывод:

·Если все вершины графа четные, то нарисовать фигуру возможно, и начать можно с любой вершины.

·Если же из этих вершин две нечетные, то нарисовать фигуру можно, но только начинать необходимо в одной из этих двух нечетных вершин, а заканчивать во второй нечетной вершине.

·Если в графе более двух нечетных вершин, то нарисовать фигуру невозможно .

Вопрос о разрешимости таких задач входит в теорию графов. Впервые ее исследовал Л. Эйлер в 1736г., решая задачу о Кенигсбергских мостах.

4). Город Кенигсберг расположен на берегах и двух островах реки Преголя. Части города соединены между собой семью мостами. В воскресные дни горожане совершили прогулки по городу. И возник вопрос, можно ли выбрать такой маршрут, чтобы пройти по каждому мосту только один раз и вернуться в начальную точку пути?

Попробуем разрешить эту задачу. Но сначала составим план города, как это сделал Л. Эйлер. Он обозначил части города точками (вершины), а переходы по мостам - линиями (ребра). Получил граф.

Ответ: обход по всем мостам только один раз невозможен, т.к. все вершины графа нечетные.

Поэтому графы, которые можно нарисовать указанным способом, называются Эйлеровыми графами.

§10. Круги Эйлера

1.Примерное содержание сообщения учащегося о Леонарде Эйлере.
<C:\Users\Максим\Desktop\приложение 4.doc>

2.Рассказ учителя о кругах Эйлера.

Очень часто бывает так, что решение задачи помогает найти рисунок. Использование рисунка делает решение задачи простым и наглядным.

Рассмотрим такую *задачу*.

1). В классе 35 учеников. Из них: 19 ребят занимают в математическом кружке, 10 - в биологическом, 9 ребят не посещают эти кружки. Сколько биологов увлекаются математикой?

Решение. Для решения задачи изобразим в виде "кругов" учащихся,

занимающихся математикой и биологией.

Обозначим их буквами М и Б соответственно. Круги М и Б содержатся в прямоугольнике, которым мы изображаем всех учащихся класса.

Нам очевидно, что общая часть кругов М и Б состоит из тех ребят, которые одновременно увлекаются и математикой, и биологией. Теперь давайте посчитаем. Всего внутри прямоугольника 35 ребят. Внутри двух маленьких кругов М и Б будет 35-9= 26 ребят, поскольку нам известно, что 9 ребят не посещают кружки. Внутри "математического" круга 19 ребят, значит, в той части "биологического" круга, которая расположена вне круга М, находится 26-19= 7 биологов, не посещающих математический кружок. Остальные биологи, их 10-7= 3, находятся в общей части кругов МБ. Таким образом, 3 биолога увлекаются математикой.

Изображение различных множеств в виде кругов широко использовал в своих научных трудах великий математик XVIII века Леонард Эйлер. Именно поэтому рисунки, подобные в задаче, которую разобрали выше, обычно называют "кругами Эйлера". Эйлер отмечал, что изображение множеств в виде кругов "очень подходит для того, чтобы облегчить наши рассуждения".

Круги Эйлера - геометрическая схема, с помощью которой можно изобразить отношения между подмножествами.

2). В киоске около школы продается мороженое двух видов: "Спортивное" и "Мальвина". На перемене 24 ученика успели купить мороженое. При этом 15 из них купили "Спортивное", а 17 - мороженое "Мальвина". Сколько человек купили мороженое обоих сортов?

Общая часть кругов состоит из тех школьников, которые купили мороженое обоих сортов. Всего мороженое купили 24 ученика. Внутри круга М 17 учеников, а в круге С - 15 учеников. Возьмем, например, учащихся, купивших мороженое "Мальвина". Получим 24-17=7 учащихся, которые купили мороженое "Спортивное", но не купили мороженое "Мальвина". Остальные учащиеся: 15-7= 5 купили и мороженое "Спортивное", и "Мальвина". Таким образом, мы получили 5 учеников, которые купили оба вида мороженого.

3). Из 100 туристов, отправляющихся в заграничное путешествие, немецким языком владеют 30 человек, английским - 28, французским - 42. Английским и немецким одновременно владеют 8 человек, английским и французским - 10, немецким и французским - 5, всеми тремя языками - 3. Сколько туристов не владеют ни одним языком?

Всеми тремя языками владеют три туриста, значит, в общей части кругов вписываем число 3. Английским и французским языками владеют 10 человек, а 3 из них владеют еще и немецким. Следовательно, только английским и французским владеют 10-3=7 человек. Аналогично получаем, что только английским и немецким владеют 8-3=5 человек, а немецким и французским 5-3=2 туриста. Вносим эти данные в соответствующие части.

Определим теперь, сколько человек владеют только одним из перечисленных языков. Немецкий знают 30 человек, но 5+3+2=10 из них владеют и другими языками, следовательно, только немецкий знают 20 человек. Аналогично получаем, что одним английским владеют 13 человек, а одним французским - 30 человек. По условию задачи всего 100 туристов. 20+13+30+5+7+2+3=80 туристов знают хотя бы один язык, следовательно,20 человек не владеют ни одним из данных языков.

Ответ: только английским владеет 13 человек, только французским - 30, только немецким - 20 человек.20 человек не знают ни одного из этих языков.

4). В классе 30 человек.20 из них каждый день пользуются метро, 15 - автобусом, 23 - троллейбусом, 10 - и метро, и троллейбусом, 12 - и метро, и автобусом, 9 - и троллейбусом, и автобусом. Сколько человек ежедневно пользуется всеми тремя видами транспорта?

Решение: Для решения опять воспользуемся кругами Эйлера.

Пусть x - человек пользуется всеми тремя видами транспорта. Тогда пользуются только метро и троллейбусом - (10 ? x) человек, только автобусом и троллейбусом - (9 ? x) человек, только метро и автобусом - (12 ? x) человек. Найдем, сколько человек пользуется одним только метро: 20 ? (12 ? x) ? (10 ? x) ? x = x ? 2. Аналогично получаем: x ? 6 - только автобусом и $x + 4$ - только троллейбусом, так как всего 30 человек, составляем уравнение: x + (12 ? x) + (9 ? x) + (10 ? x) + (x + 4) + (x ? 2) + (x ? 6) = 30, отсюда $\boldsymbol{x = 3}$.

Задачи для самостоятельного решения:

1). В трех шестых классах 70 ребят. Из них 28 занимаются в драмкружке, 32 поют в хоре, 22 увлекаются спортом. В драмкружке 10 ребят из хора, в хоре 6 спортсменов, в драмкружке 8 спортсменов, 3 спортсмена посещают и драмкружок и хор. Сколько ребят не поют в хоре, не увлекаются спортом и не занимаются в драмкружке? Сколько ребят заняты только спортом?

2). В классе 38 человек. Из них 16 играют в баскетбол, 17 - в хоккей, 18 - в футбол. Увлекаются двумя видами спорта - баскетболом и хоккеем - четверо, баскетболом и футболом - трое, футболом и хоккеем - пятеро. Трое не увлекаются ни баскетболом, ни хоккеем, ни футболом, а 2 школьника увлекаются сразу тремя видами спорта. Сколько ребят увлекается лишь одним из этих видов спорта?

3). Из 100 человек 85 знают английский язык.80 - испанский, 75 - немецкий. Сколько человек знают только один язык, если все три знают 10 человек?

4). В классе 30 человек.20 из них каждый день пользуются метро, 15 - автобусом, 23 - троллейбусом, 10 - и метро, и троллейбусом, 12 - и метро, и автобусом, 9 - и троллейбусом, и автобусом. Сколько человек ежедневно пользуются всеми тремя видами транспорта?

5). Контрольная работа по математике состояла из задачи, уравнения и неравенства. Контрольную работу писали 40 человек. Правильно решили только задачу 2 ученика, только неравенство - 4 человека, только уравнение - 3 человека. Не решили только задачу 7 человек, только уравнение - 5 человек, только пример - 6 человек. Остальные выполнили всю работу правильно. Сколько таких учащихся?

§11. Математические шифры

Занятие по математическим шифрам проводится в виде игры - исторического путешествия. В начале занятия кратко о шифрах рассказывает учитель, а затем слово предоставляется учащимся. Участники кружка рассказывают о разных шифрах, придуманных в разных странах (Афинах, Греции, России). Обыграть историческое путешествие по шифрам можно следующим образом: рефераты рассказывать от первого лица. То есть учащийся, рассказывая, например, о шифре "скитала", говорит от лица полководца Лисандра, приводит конкретный пример на шифр и предлагает остальным участникам кружка зашифровать или, наоборот, расшифровать предложенное сообщения.

Вступительное слово учителя:

Издавна люди изыскивали способы уберечь некоторые важные сообщения от посторонних глаз. Рассказывают, как один царь обрил голову гонца, написал на ней послание и отослал гонца к своему союзнику лишь тогда, когда волосы на его голове отросли. Развитие химии дало удобное средство для тайнописи: симпатические чернила, записи которыми не видны до тех пор, пока бумагу не нагреют или обработают каким-нибудь химикатом. Но чаще стали применять шифры: сначала ими пользовались пираты, отмечая расположение кладов, алхимики, купцы, заговорщики. Впоследствии - дипломаты, стремящиеся сохранить тайны переговоров, военоначальники, скрывающие от противника отданные распоряжения, разведчики и так далее.

При шифровании должны выполняться определенные условия. Во-первых, различные буквы должны обозначаться разными знаками: иначе получатель должен будет гадать, какую из нескольких букв обозначает тот или иной знак. Далее, шифр должен быть трудно разгадываемым - легкие шифры можно применять лишь при условии, что у противника нет времени на разгадку. Наконец, секретность шифра должна сочетаться со сравнительной несложностью операций кодирования и раскодирования: иначе у них уйдет столько времени, что переданная информация устареет. Впрочем, в наше время данные операции могут быть поручены ЭВМ. А если раскодирование потребует слишком много усилий, то можно оказаться в положении легендарного писца. Он писал за плату письма на восточном базаре, но при этом взимал плату еще и как гонец. Дело было в том, что написанное им никто, кроме него самого, понять не мог.

Шифрование методом решетки Кардано.

Кроме замены букв другими буквами или числами, применяются методы шифрования, основанные на перестановке букв. Рассмотрим один из более современных методов перестановки букв - решетке Кардано. Решётка Кардано - инструмент кодирования и декодирования, представляющий собой специальную прямоугольную (в частном случае - квадратную) таблицу-карточку, часть ячеек которой вырезана.

Описание решетки Кардано.

Решетка Кардано сделана из листа картона или пергамента, или же из тонкого металла. Чтобы обозначить линии письма, бумагу разлиновывают, и между этими линиями вырезают прямоугольные области через интервалы произвольной длины. (Показать изготовленную заранее решетку). Шифратор помещает решетку на лист бумаги и пишет сообщение в прямоугольных отверстиях, в которых помещается отдельный символ, слог или целое слово. При передвижении решётки фрагменты заполняются, образуя запись, искажающую исходное сообщение.

У получателя сообщения должна быть такая же решетка. Копии решетки вырезаются из первичного шаблона, однако для взаимно-однозначного соответствия можно было бы сделать множество других шаблонов. Решетку можно разместить в 4 положениях - лицом вверх, лицом вниз, вертикально и в перевернутом положении, что вчетверо увеличивает число возможных размещений сетки.

Чтобы прочитать закодированное сообщение, необходимо наложить решётку Кардано на текст нужное число раз и прочитать буквы, расположенные в вырезанных ячейках. Решётки Кардано представляют собой квадратные таблицы, где четверть ячеек прорезана так, что при четырёх поворотах они показывают весь квадрат. Вписание в прорезанные ячейки текста и повороты решётки продолжаются до тех пор, пока весь квадрат не будет заполнен. Например, на рисунке ниже показан процесс шифровки решеткой 4 на 4:

При зашифровке таким способом, мы получили шифр текст: СЗДО_ЕИКТБОМАРУ_. Необходимо указать на недостатки этого метода, что он является медленным и требует наличия литературных навыков. Но самое главное, что любой шифровальный аппарат может быть утерян, украден или конфискован. Таким образом, потерять одну решетку - значит потерять всю секретную переписку, шифровавшуюся с помощью этой решетки.

§12. Геометрия на спичках

В работе над задачками можно использовать спички, счётные палочки или просто рисунок на бумаге. Спички имеют стандартную длину и это свойство позволяет строить из них различные геометрические фигуры. Одна спичка - это модель отрезка.

Данное занятие целесообразно провести в форме викторины. Разделить участников кружка на команды (желательно на 2 команды, а также несколько человек сделать независимым жюри). Дать учащимся время на выбор в каждой команде капитана, название команды. По окончании игры можно подарить каждой команде сувениры, приготовленные заранее.

§13. Фокусы

В начале занятия учитель сообщает учащимся, что он - телепат, и может угадать трехзначное число, которое любой из учащихся загадает.

Учитель (обращаясь к одному из участников кружка):

·Возьми бумажку. Запиши на ней трехзначное число. Мне не показывай!

·Припиши к нему это же число еще раз.

·Теперь передай своему соседу.

·Теперь второй учащийся должен разделить это число на 7 и передать бумажку дальше.

·Следующий нам разделит это число на 11, запишет его на чистой бумажке и отдаст результат учителю.

·Слушаем ответ! Правильно? Конечно правильно, это и называется телепатия.

Секрет: последний результат надо разделить на 13 и мы получим исходное число.

Разъяснение: Когда мы к трехзначному числу приписали такое же число, то мы тем самым умножили его на 1001, а затем, разделив последовательно на 7, 11, 13, мы разделили его на 1001, то есть получили задуманное трехзначное число.

Далее учитель может предложить одному из учащихся загадать число от 1 до 12, и сказать, что это число может быть угадано. На доске заранее вывешен круг, на котором изображены числа от 1 до 12, (для той же цели можно взять часы и предложить угадать кем-либо час).

Учитель:

·просит загадать любого участника кружка одно из чисел, изображенных на кругу и не говорить его.

·Сам выбирает произвольное число n (также из круга).

·Указывает его ученику.

·Предлагает продолжить счет от задуманного учеником числа против часовой стрелки, стартуя с числа, указанного учителем и закончив на числе n+12.

Когда же учащийся досчитает, то как раз сам укажет на задуманное им число.

"Угадать возраст"

Предложить умножить человеку, у которого пытаемся узнать возраст, число лет на 2, прибавить 5, а сумму снова умножить на 5. Полученное число сообщить.

Секрет фокуса: Нетрудно догадаться, что последней цифрой результата будет цифра 5. Ее необходимо отбросить а от оставшегося числа отнять 2. Разность и есть искомый результат.

"Угадывание дня, месяца и года рождения"

Предложить одному из учащихся выполнить следующие действия: Умножить номер месяца, в котором он родились, на 100, затем прибавить день рождения, результат умножить на 2, к полученному числу прибавить 2, результат умножить на 5, к полученному числу прибавить 1, к результату приписать 0, к полученному числу прибавить еще 1 и, наконец, прибавьте число его лет. После этого он должен сообщить, какое число у него получилось.

Секрет фокуса: от названного числа отнять 111, а потом остаток разбить на три грани справа налево по две цифры. Средние две цифры обозначают день рождения, первые две или одна - номер месяца, а последние две цифры - число лет, зная число лет, определяется год рождения.

Фокусы с предметами.

"День недели" <#"266" src="doc_zip24.jpg" />

Смысл фокуса заключается в том, чтобы высший разряд привести в "порядок", расположить цифры в порядке возрастания, с разницей между ними в единицу.

"В какой руке монета? <#"center">

§ 14. Математическая регата

Математическая регата - увлекательное соревнование, которое может быть проведено не только во внеурочное время, но и во время уроков. Она проводится с целью активизации математических знаний учащихся и повышения интереса к предмету. В данном мероприятии представлены задания на различные темы, которые изучались учащимися во время занятия.

Соревнование проводится в 4 тура, то есть своеобразные заезды. Поскольку занятие получается объемное по содержанию, что целесообразнее провести его либо в два урока по 45 минут (по два этапа), либо два занятия подряд, выделив для этого непосредственно 90 минут. Два тура представляют собой коллективное письменное решение задач. Любая задача оформляется и сдается на отдельном листе. Третий тур представляет собой конкурс капитанов. Задания, представленные для решения, также оформляются и сдаются на отдельном листе. Четвертый, завершающий, тур представлен в качестве коллективного творческого задания. То есть каждая из команд зашифровывает сообщение по одному из шифров, которые они знают, по предложенной теме. Данный этап - конкурс можно обыграть: например, одна из команд выбрала Египет. Один из участников кратко рассказывает о стране (сообщение готовят сами учащиеся), а затем представляют текст, который остальные учащиеся должны расшифровать.

Ведущий "Математической регаты" объявляет о начале мероприятия, что в программе ожидаются заезды "одиночек" (конкурс капитанов), а также заезды "четверок", "пятерок" (в зависимости от участников в каждой команде).

Регатой руководит Координатор. Он организует раздачу задания и сбор листов с решениями; проводит разбор задач и объявляет итоги проверки. Координатором может быть учитель.

Время, отведенное командам для решения и "ценность" задач каждого тура в баллах указаны на листах с условиями задач.

Жюри осуществляет проверку решений после окончания каждого тура.

Параллельно с проверкой Координатор проводит разбор задач для учащихся, а затем объявляет итоги проверки. После объявления итогов тура команды, не согласные с тем, как оценены их решения, имеют право подать заявки на апелляцию.

В случае получения такой заявки, комиссия повторно проверяет и, после этого, может изменить свою оценку. Если оценка не изменена, то апелляции эта же комиссия принимает после окончания всех туров регаты, но до окончательного подведения итогов. В результате апелляции оценка решения может быть как повышена, так и понижена, или оставлена без изменения.

В спорных случаях окончательное решение об итогах проверки принимает председатель жюри.

Команды-победители и призеры регаты определяются по сумме баллов, набранных каждой командой во всех турах.